



第二章 投影法

2.1 投影法的基本知识

光线照射物体时,可在预设的面上产生影子。利用这个原理在平面上绘制出物体的图像,以表示物体的形状和大小,这种方法称为投影法。工程上应用投影法获得工程图样的方法,是从日常生活中自然界的一种光照投影现象抽象出来的。

由投影中心、投影线和投影面三要素所决定的投影法可分为中心投影法和平行投影法。

2.1.1 中心投影法

如图 2-1 所示,投影线自投影中心 S 出发,将空间 $\triangle ABC$ 投射到投影面 P 上,所得 $\triangle abc$ 即为 $\triangle ABC$ 的投影。这种投影线自投影中心出发的投影法称为中心投影法,所得投影称为中心投影。

中心投影法主要用于绘制产品或建筑物富有真实感的立体图,也称透视图。

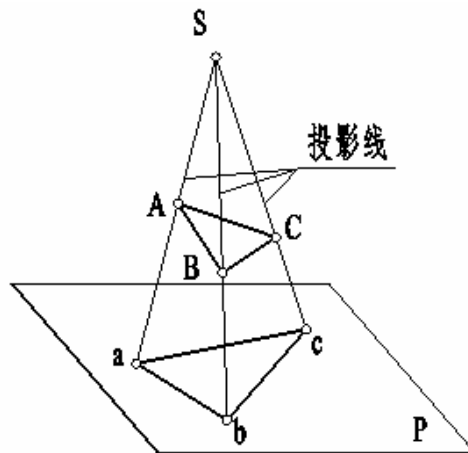


图 2-1 中心投影法

2.1.2 平行投影法

若将投影中心 S 移到离投影面无穷远处,则所有的投影线都相互平行,这种投影线相互平行的投影方法,称为平行投影法,所得投影称为平行投影。平行投影法中以投影线是否垂直于投影面分为正投影法和斜投影法。若投影线垂直于投影面,称为正投影法,所得投影称为正投影,如图 2-2a 所示;若投影线倾斜于投影面,称为斜投影法,所得投影称为斜投影,如图 2-2b 所示。

正投影法主要用于绘制工程图样;斜投影法主要用于绘制有立体感的图形,如斜轴测图。

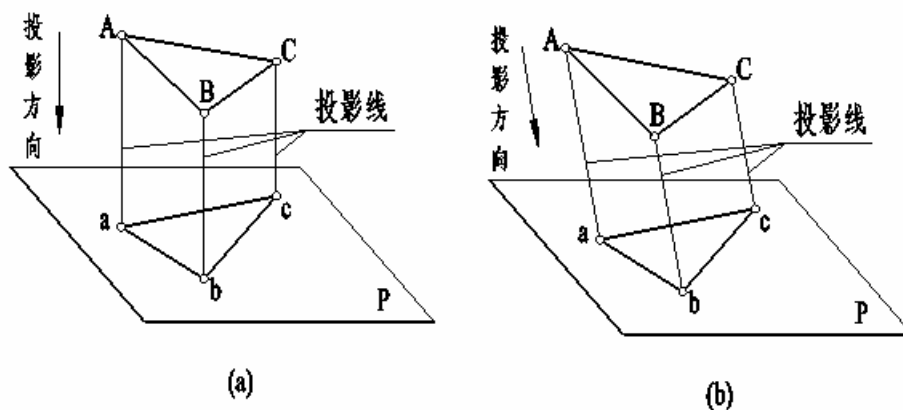


图 2-2 平行投影法

2.2 点的投影

2.2.1 点的三面投影

组成物体的基本元素是点、线、面。为了顺利表达各种产品的结构，必须首先掌握几何元素的投影特性。

要唯一确定几何元素的空间位置及形状和大小，乃至物体的形状和大小，必须采用多面正投影的方法。通常选用三个互相垂直的投影面，建立一个三投影面体系。三个投影面分别称为正立投影面 V 、水平投影面 H 、侧立投影面 W 。它们将空间分为八个部分，每个部分为一个分角，其顺序如图 2-3 (a) 所示。我国国家标准中规定采用第一分角画法，本教材重点讨论第一分角画法。三投影面体系的立体图在后文中出现时，都画成图 2-3 (b) 的形式。

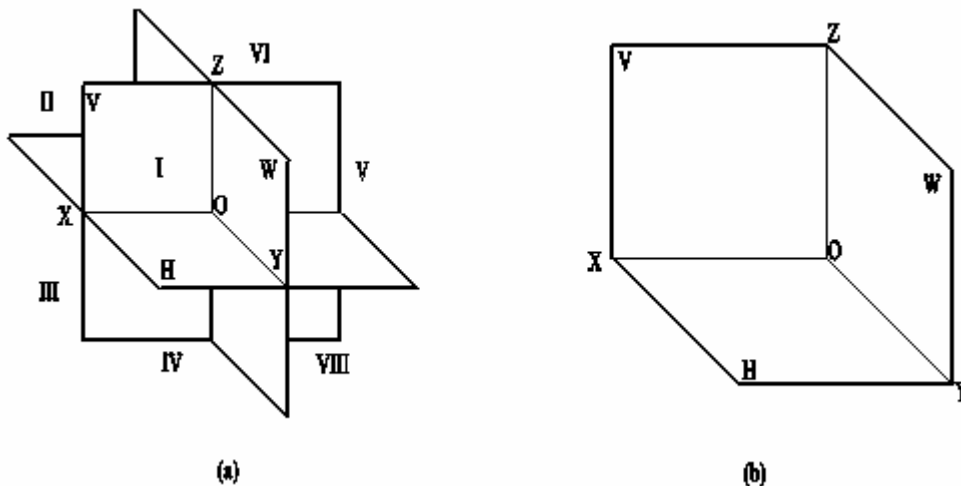


图 2-3 三投影面体系

三个投影面两两垂直相交，得三个投影轴分别为 OX 、 OY 、 OZ ，其交点 O 为原点。画投影图时需要将三个投影面展开到同一个平面上，展开的方法是 V 面不动， H 面和 W 面分别绕 OX 轴或 OZ 轴向下或向右旋转 90° 与 V 面重合。展开后，画图时去掉投影面边框。



为了统一起见，规定空间点用大写字母表示，如 A 、 B 、 C 等；水平投影用相应的小写字母表示，如 a 、 b 、 c 等；正面投影用相应的小写字母加撇表示，如 a' 、 b' 、 c' ；侧面投影用相应的小写字母加两撇表示，如 a'' 、 b'' 、 c'' 。

如图 2-4，三投影面体系展开后，点的三个投影在同一平面内，得到了点的三面投影图。应注意的是：投影面展开后，同一条 OY 轴旋转后出现了两个位置。

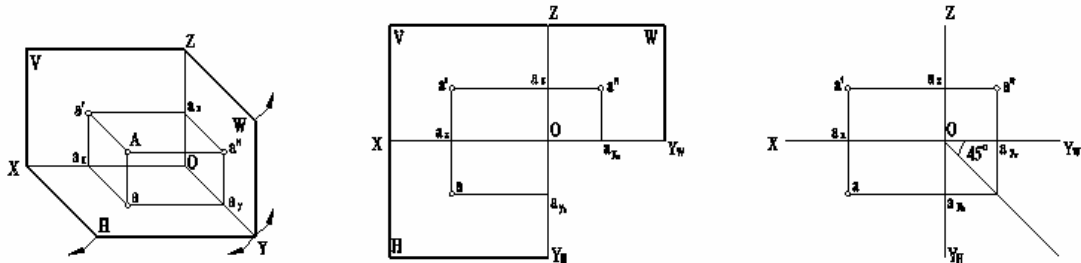


图 2-4 点的三面投影

由于投影面相互垂直，所以三投影线也相互垂直，8 个顶点 A 、 a 、 a_y 、 a' 、 a'' 、 a_x 、 O 、 a_z 构成正六面体，根据正六面体的性质可以得出三面投影图的投影特性如下：

① 点的正面投影和水平投影的连线垂直于 OX 轴，即 $aa' \perp OX$ ；点的正面投影和侧面投影的连线垂直于 OZ 轴，即 $a'a'' \perp OZ$ ；同时 $aa_y \perp OY_H$ ， $a''a_{y_w} \perp OY_W$ 。

② 点的投影到投影轴的距离，反映空间点到以投影轴为界的另一投影面的距离，即：

$$a'a_z = Aa'' = aa_{y_h} = x \text{ 坐标}; \quad aa_x = Aa' = a''a_z = y \text{ 坐标}; \quad a'a_x = Aa = a''a_{y_w} = z \text{ 坐标}.$$

为了表示点的水平投影到 OX 轴的距离等于侧面投影到 OZ 轴的距离，即： $aa_x = a''a_z$ ，点的水平投影和侧面投影的连线相交于自点 O 所作的 45° 角平分线，如图 2-4c 所示的方法。

例 2-1 已知点 A 和 B 的两投影（图 2-5a），分别求其第三投影，并求出点 A 的坐标。

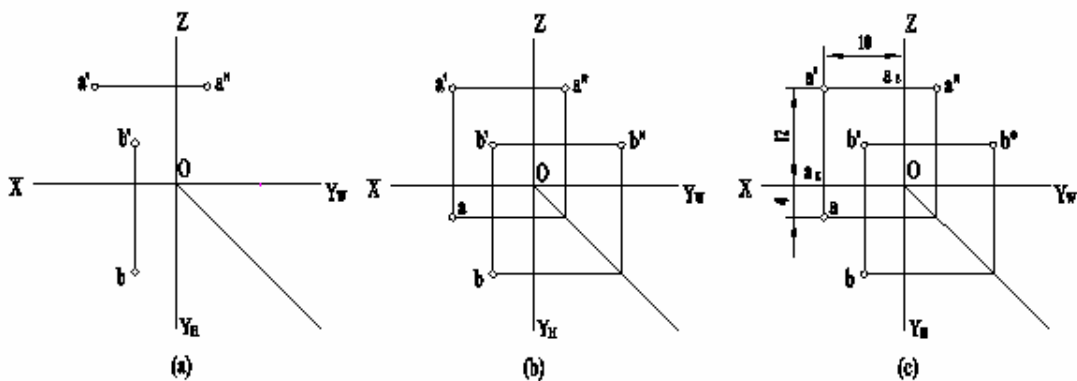


图 2-5 已知点的两面投影求第三投影

解 如图 2-5b 所示，根据点的投影特性，可分别作出 a 和 b'' ；如图 2-5c 所示，分别量取 $a'a_z$ 、 aa_x 、 $a'a_x$ 的长度为 10、4、12，可得出点 A 的坐标（10，4，12）。

2.2.2 两点之间的相对位置关系

观察分析两点的各个同面投影之间的坐标关系，可以判断空间两点的相对位置。根据 x 坐标值的大小可以判断两点的左右位置；根据 z 坐标值的大小可以判断两点的上下位置；根



据 y 坐标值的大小可以判断两点的前后位置。如图 2-5c 所示, 点 B 的 x 和 z 坐标均小于点 A 的相应坐标, 而点 B 的 y 坐标大于点 A 的 y 坐标, 因而, 点 B 在点 A 的右方、下方、前方。

若 A 、 B 两点无左右、前后距离差, 点 A 在点 B 正上方或正下方时, 两点的 H 面投影重合 (如图 2-6), 点 A 和点 B 称为对 H 面投影的重影点。同理, 若一点在另一点的正前方或正后方时, 则两点对 V 面投影的重影点; 若一点在另一点的正左方或正右方时, 则两点对 W 面投影的重影点。

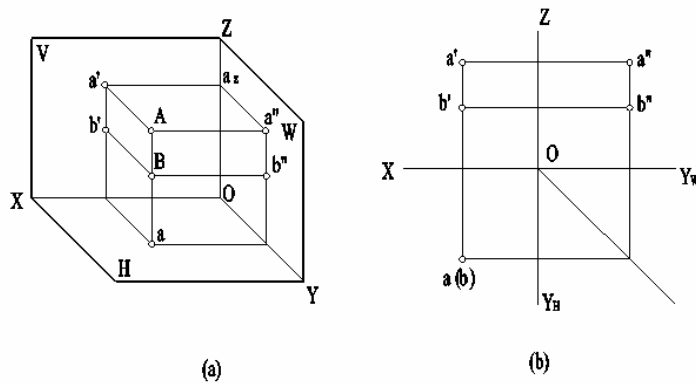


图 2-6 重影点

重影点需判别可见性。根据正投影特性, 可见性的区分应是前遮后、上遮下、左遮右。图 2-6 中的重影点应是点 A 遮挡点 B , 点 B 的 H 面投影不可见。规定不可见点的投影加括号表示。

2.3 直线的投影

2.3.1 直线的投影

一般情况下, 直线的投影仍是直线, 如图 2-7a 中的直线 AB 。在特殊情况下, 若直线垂直于投影面, 直线的投影可积聚为一点, 如图 2-7a 中的直线 CD 。

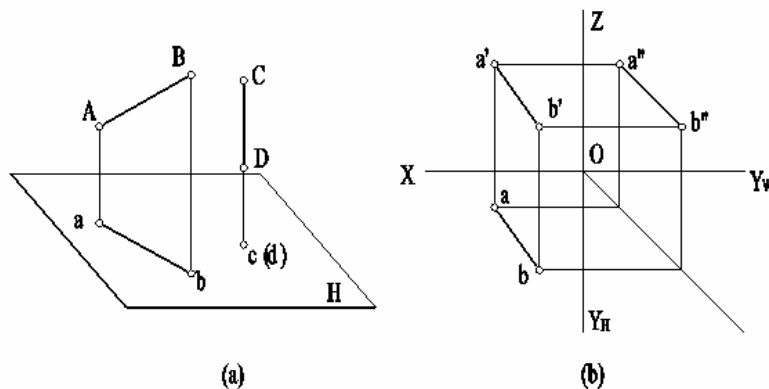


图 2-7 直线的投影

直线的投影可由直线上两点的同面投影连接得到。如图 2-7b, 分别作出直线上两点 A 、 B 的三面投影, 将其同面投影相连, 即得到直线 AB 的三面投影图。



2.3.2 各种位置直线的投影特性

在三投影面体系中，直线对投影面的相对位置可以分为三种：投影面平行线、投影面垂直线、投影面倾斜线。前两种为投影面特殊位置直线，后一种为投影面一般位置直线。

a) 投影面平行线

与投影面平行的直线称为投影面平行线，它与一个投影面平行，与另外两个投影面倾斜。与 H 面平行的直线称为水平线，与 V 面平行的直线称为正平线，与 W 面平行的直线称为侧平线。它们的投影图及投影特性见表 2-1。规定直线（或平面）对 H 、 V 、 W 面的倾角分别用 α 、 β 、 γ 表示。

b) 投影面垂直线

与投影面垂直的直线称为投影面垂直线，它与一个投影面垂直，必与另外两个投影面平行。与 H 面垂直的直线称为铅垂线，与 V 面垂直的直线称为正垂线，与 W 面垂直的直线称为侧垂线。它们的投影图及投影特性见表 2-2。

c) 一般位置直线

一般位置直线与三个投影面都倾斜，因此在三个投影面上的投影都不反映实长，投影与投影轴之间的夹角也不反映直线与投影面之间的倾角，见图 2-8。

表 2-1 投影面平行线的投影特性

| 名称 | 水平线 | 正平线 | 侧平线 |
|------|--|---|--|
| 立体图 | | | |
| 投影图 | | | |
| 投影特性 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 水平投影反映实长，与 X 轴夹角为 β，与 Y 轴夹角为 α 2. 正面投影平行 X 轴 3. 侧面投影平行 Y 轴 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 正面投影反映实长，与 X 轴夹角为 α，与 Z 轴夹角为 γ 2. 水平投影平行 X 轴 3. 侧面投影平行 Z 轴 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 侧面投影反映实长，与 Y 轴夹角为 α，与 Z 轴夹角为 β 2. 正面投影平行 Z 轴 3. 水平投影平行 Y 轴 |



表 2-2 投影面垂直线的投影特性

| 名称 | 铅垂线 | 正垂线 | 侧垂线 |
|------|---|---|---|
| 立体图 | | | |
| 投影图 | | | |
| 投影特性 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 水平投影积聚为一点 2. 正面投影和侧面投影都平行于 Z 轴, 并反映实长 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 正面投影积聚为一点 2. 水平投影和侧面投影都平行于 Y 轴, 并反映实长 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 侧面投影积聚为一点 2. 正面投影和水平投影都平行于 X 轴, 并反映实长 |

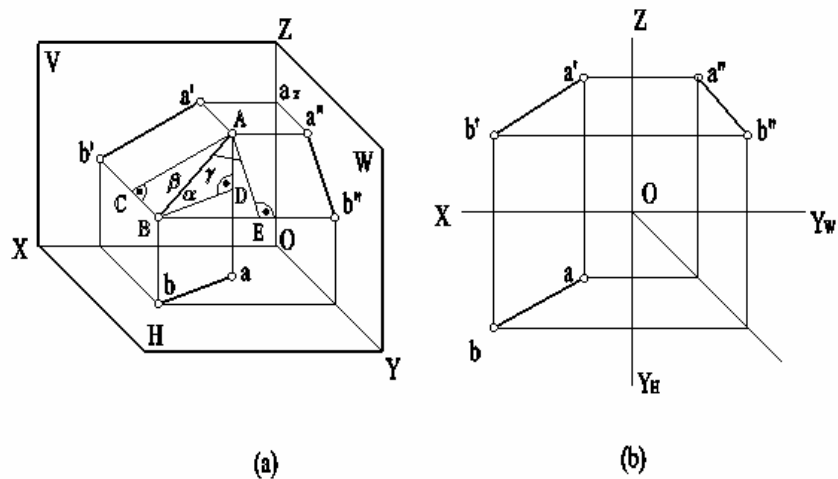


图 2-8 一般位置直线的投影



2.3.3 一般位置直线的实长及对投影面的倾角

求一般位置直线的实长和对投影面的倾角常采用直角三角形法。

将图 2-8a 中 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABE$ 分别取出，可得到三个直角三角形。只考虑直角三角形的组成关系，如图 2-9 所示，经分析可以得出：直角三角形的斜边为直线的实长，一直角边为 Z （或 Y 、 X ）方向的坐标差，另一直角边为直线水平（或正面、侧面）投影；实长与某一投影面上的投影的夹角即直线对该投影面的倾角，一个直角三角形只能求出直线对一个投影面的倾角。

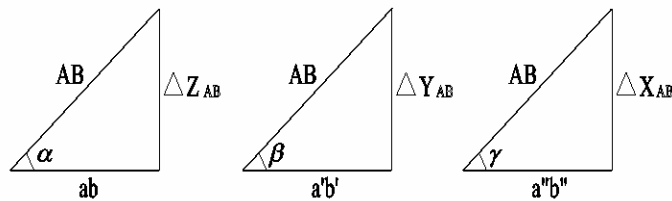


图 2-9 直角三角形法的三种三角形

利用直角三角形法，只要知道四个要素中的两个要素，即可求出其它两个未知要素。

例 2-2 如图 2-10a，已知直线 AB 对 H 面的倾角 $\alpha = 30^\circ$ ，试求 AB 的正面投影。

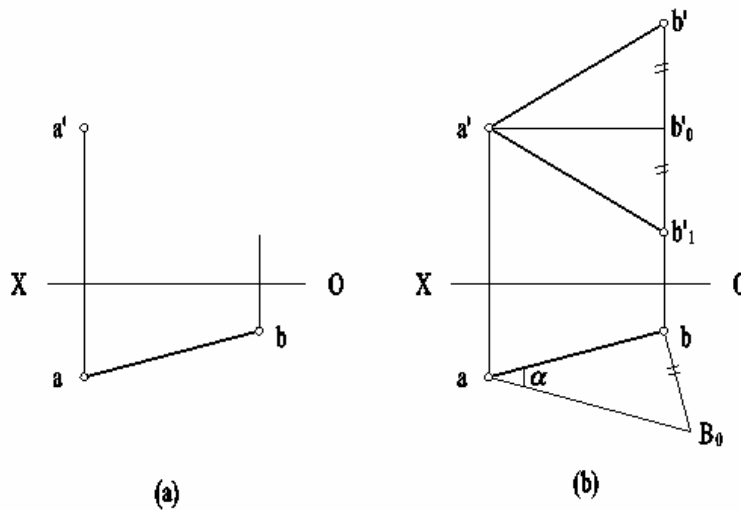


图 2-10 求直线的正面投影

解 如图 2-10b 所示，依据 AB 的水平投影 ab 和 α 角，求出 A 、 B 两点的 Z 坐标差；依据点的投影规律求出 b' ，即可得到 AB 的正面投影。有两解。

2.3.4 曲线的投影

(1) 曲线的分类

一般情况下，曲线是指一动点在空间作连续运动时形成的轨迹。

按动点的运动有无规则，曲线可分为规则曲线和不规则曲线两类。规则曲线可以用代数



方程式或投影图表示；不规则曲线可以用计算几何方法来描述，也可以用投影图来表示。

按曲线上所有点是否在同一个平面上，曲线又可分为平面曲线和空间曲线。平面曲线指曲线上所有点都在同一个平面上的曲线；空间曲线指曲线上任意四个点不在同一平面上的曲线。

(2) 曲线的投影

一般情况下，曲线至少需要两个投影才能确定其在空间的形状和位置。按照曲线形成的过程，依次画出曲线上一系列点的投影，然后把这些点的同面投影依次光滑连接起来，即可得到曲线的投影，如图 2-11。

为了保证曲线投影的准确和清晰，在绘制曲线投影图时，通常是先作出曲线上一些特殊点的投影，如曲线的端点、最高点、最低点、最左点、最右点和转向点（如图 2-12a 中的点 M ）、回折点（如图 2-12b 中的点 N ）、自交点（如图 2-12c 中的点 L ）等，然后求出适当数量的一般点的投影，以使用曲线板光滑连接成曲线。

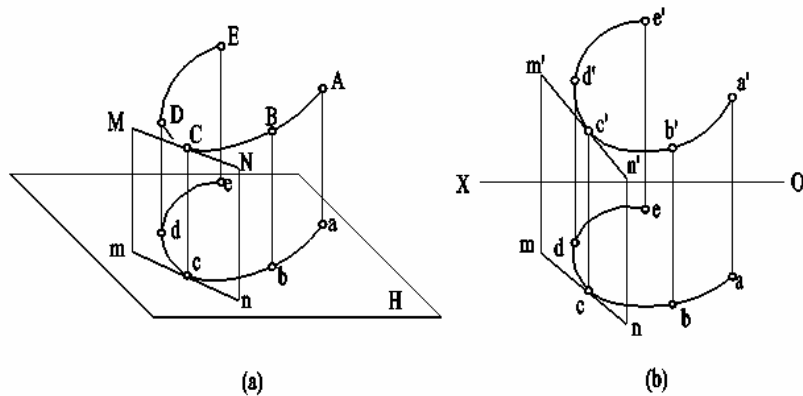


图 2-11 曲线的投影

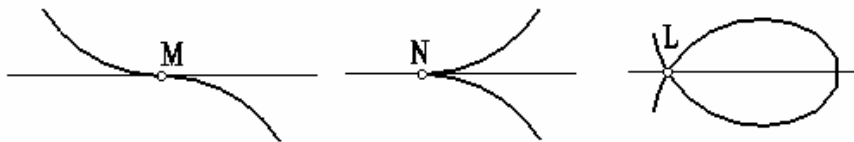


图 2-12 曲线上的特殊点

(3) 曲线的投影特性

曲线投影有如下特性：

① 曲线的投影一般仍为曲线，如图 2-11 所示。只有平面曲线所在的平面垂直于某投影面时，曲线的投影才积聚为一条直线。

② 曲线的投影是该曲线上所有点的同面投影的集合，因此，曲线上任一点的投影必在曲线的同面投影上。如图 2-11 中曲线上的点 B ，它的水平投影 b 在曲线的水平投影上。

③ 曲线切线的投影仍是该曲线同面投影的切线，并且切点的投影仍是曲线投影上的切点。如图 2-11 中的切线 MN 和切点 C 。

④ 曲线上的特殊点在其投影图中一般仍保持其特殊点的性质。如圆和椭圆的中心点在投影图上仍为中心点，双曲线和抛物线的顶点投影后仍为其投影的顶点。此外，曲线上的转向点、回折点和自交点投影后仍为曲线投影的转向点、回折点和自交点，如图 2-12 所示。



2.4 平面的投影

2.4.1 平面的表示法

由初等几何可知，不属于同一直线的三点确定一平面。因此，可由下列任意一组几何元素的投影表示平面（如图 2-13）：a）不在同一直线上的三个点；b）一直线和不属于该直线的一点；c）相交两直线；d）平行两直线；e）任意平面图形。

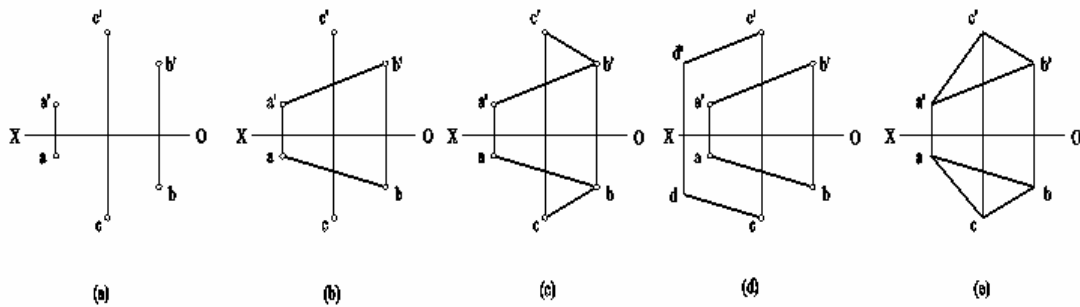


图 2-13 平面表示法

2.4.2 各种位置平面的投影特性

在三投影面体系中，平面和投影面的相对位置关系与直线和投影面的相对位置关系相同，可以分为三种：投影面平行面、投影面垂直面、投影面倾斜面。前两种为投影面特殊位置平面，后一种为投影面一般位置平面。

a) 投影面平行面

投影面平行面是平行于一个投影面，并必与另外两个投影面垂直的平面。与 H 面平行的平面称为水平面，与 V 面平行的平面称为正平面，与 W 面平行的平面称为侧平面。它们的投影图及投影特性见表 2-3。

b) 投影面垂直面

投影面垂直面是垂直于一个投影面，并与另外两个投影面倾斜的平面。与 H 面垂直的平面称为铅垂面，与 V 面垂直的平面称为正垂面，与 W 面垂直的平面称为侧垂面。它们的投影图及投影特性见表 2-4。

c) 一般位置平面

一般位置平面与三个投影面都倾斜，因此在三个投影面上的投影都不反映实形，而是缩小了的类似形，如图 2-14。

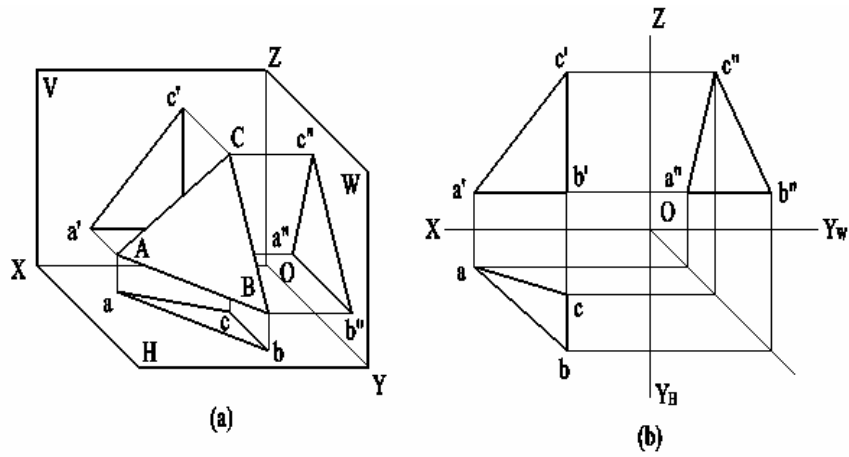


图 2-14 一般位置平面的投影

表 2-3 投影面平行面的投影特性

| 名称 | 水平面 | 正平面 | 侧平面 |
|------|--|--|--|
| 立体图 | | | |
| 投影图 | | | |
| 投影特性 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 水平投影反映实形。 2. 正面投影积聚成平行于 X 轴的直线。 3. 侧面投影积聚成平行于 Y 轴的直线。 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 正面投影反映实形。 2. 水平投影积聚成平行于 X 轴的直线。 3. 侧面投影积聚成平行于 Z 轴的直线。 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 侧面投影反映实形。 2. 正面投影积聚成平行于 Z 轴的直线。 3. 水平投影积聚成平行于 Y 轴的直线。 |



表 2-4 投影面垂直面的投影特性

| 名称 | 铅垂面 | 正垂面 | 侧垂面 |
|------|--|---|--|
| 立体图 | | | |
| 投影图 | | | |
| 投影特性 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 水平投影积聚成直线，与 X 轴夹角为 β，与 Y 轴夹角为 γ。 2. 正面投影和侧面投影具有类似性。 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 正面投影积聚成直线，与 X 轴夹角为 α，与 Z 轴夹角为 γ。 2. 水平投影和侧面投影具有类似性。 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 侧面投影积聚成直线，与 Y 轴夹角为 α，与 Z 轴夹角为 β。 2. 正面投影和水平投影具有类似性。 |

2.5 曲面的投影

(2) 曲面的形成及分类

曲面可以看成是一动线在空间运动的轨迹，该动线称为母线，母线的每一位置称为曲面的素线。而控制母线运动的一些不动的线或面称为导线或导面。

如图 2-15 中的圆柱面，可看成是由直线 AA 绕轴线 OO 回转而成。直线 AA 称为母线，直线 OO 称为导线，母线在曲面上的任何一个位置都称为曲面的素线。

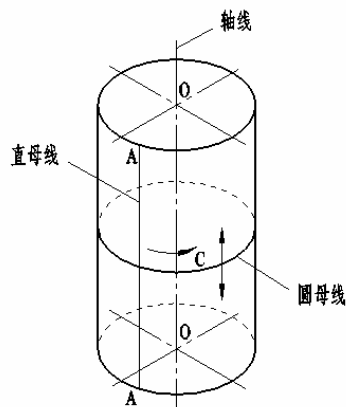


图 2-15 曲面（圆柱面）的形成

曲线的分类有多种形式。按动线运动有无规律可分为：a) 规则曲面，动线按一定规则运动时得到的曲面；b) 不规则曲面，动线作不规则运动时得到的曲面。按母线的形状不同可分为：a) 直线面，母线为直线的曲面；b) 曲线面，母线为曲线的曲面。

凡是由一直线或一曲线绕一轴线回转而形成的曲面，统称为回转曲面。

(2) 曲面的投影

在投影图上表示一个曲面时，应满足两个要求：a) 根据投影图能作出曲面上任意点和任意直线的投影；b) 能够清晰地表达出该曲面的形状。

因此，在画曲面的投影图时应注意：a) 画出决定该曲面的几何要素（如母线、导线、导面等）的投影；b) 画出曲面的投影轮廓线，确定曲面的投影范围；c) 对于复杂的曲面，还应画出曲面上一系列的素线。图 2-16 是正螺旋面的投影图。

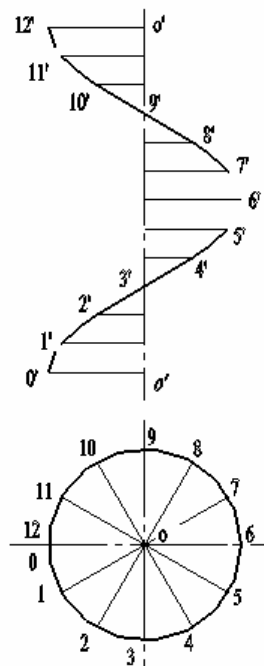


图 2-16 正螺旋面投影图